Liceo Classico "U. Foscolo"

Da: "Maria Cristina" <mariacristina.melardi@tin.it>
Data: venerdì 13 giugno 2014 19:36
A: <pvpc03000b@istruzione.it>
Allega: pag.38.pdf; pag.43.pdf; pag.51.pdf; pag.52.pdf; pag.53.pdf; pag.88.pdf; pag.96.pdf
Oggetto: Invio per posta elettronica: pag.38, pag.43, pag.51, pag.52, pag.53, pag.88, pag.96

COMPITI DELLE VACANZE VA PROF LORINI
Il messaggio è pronto per essere inviato con i seguenti file o collegamenti allegati:
pag.38
pag.43
pag.51
pag.52
pag.53
pag.88
pag.96

Ora siamo in grado di trovare l'equazione della retta che passa per l'origine ed è perpendicolare ad una retta $y = px$ assegnata (con $p \neq 0$). Basta tenere presente che questa retta è caratterizzata dal fatto di passare, oltre che per l'origine, per il punto $(1, p)$ come abbiamo visto. Allora, in base alla (2), la retta perpendicolare è

$$1 \cdot x + p \cdot y = 0$$

cioè

$$y = -\frac{1}{p} x \qquad (4)$$

Dunque, *la pendenza della retta perpendicolare è uguale all'opposto del reciproco della pendenza della retta assegnata.*

Ad esempio, la retta per l'origine ortogonale alla retta $y = x$ è la retta $y = -x$; la retta per l'origine ortogonale alla retta $y = 5x$ è la retta $y = -\frac{1}{5} x$.

Esercizi

1 Scrivere l'equazione delle rette passanti per l'origine e per i punti di coordinate: $(3, 5)$, $(-3, -5)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(1, n)$ (n intero).

2 Scrivere l'equazione delle rette passanti per l'origine e ortogonali alle rette considerate nell'esercizio precedente.

3 Data una retta per l'origine nella forma (2), scrivere direttamente l'equazione della retta ortogonale passante per l'origine. [Trovare prima le coordinate di un punto diverso dall'origine che sta sulla retta (2)].

4 Dato un riferimento cartesiano, consideriamo l'insieme H formato dai punti che hanno entrambe le coordinate intere, come, ad es.: $(1, 2)$, $(0, 0)$, $(-2, 3)$. Vi sono rette che passano per l'origine e non passano per altri punti di H? Come si possono individuare? Vi sono rette passanti per l'origine che incontrano solo un numero finito di altri punti di H?

Dunque, riesaminando la formula (8), possiamo dire cosí: l'equazione generale della retta si ottiene uguagliando un polinomio lineare non nullo nelle variabili x, y ad una costante.

Il termine «lineare» richiama appunto l'idea di retta.

Esercizi

1 Scrivere le equazioni delle rette che congiungono le seguenti coppie di punti: $(2,3)$, $(5,7)$; $(-1,2)$, $(2,-1)$; $(4,2)$, $(4,3)$; $(1,1)$, $(5,-2)$.

2 Data la retta $\mathfrak{R}$ che passa per i punti $(-3,1)$, $(1,3)$, trovare il punto di $\mathfrak{R}$ che ha distanza minima dall'origine. Calcolare questa distanza.

3 Trovare una coppia di numeri (x, y) che sia soluzione dell'equazione $2x - 5y = 6$.

4 Trovare la retta parallela alla retta $3x - 5y = 1$ passante per il punto $(1, 2)$.

5 Un gas è contenuto in un recipiente a pareti fisse; indicando con x la sua temperatura (in gradi centigradi), con y la sua pressione (in atmosfere), si sa che la pressione dipende dalla temperatura secondo una legge del tipo della (9), cioè: $y = a\,x + b$. Alla temperatura di 20° la pressione è di 15,236 atm, alla temperatura di 70° la pressione è di 17,836 atm. Determinare i coefficienti a, b e stabilire per quale valore della temperatura la pressione si annulla (ammettendo che valga sempre la legge).

17.3 I sistemi lineari

17.3 Un sistema del tipo

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \qquad (11)$$

in cui i primi membri sono polinomi lineari nelle incognite x ed y, mentre i secondi membri sono numeri assegnati, si dice **sistema lineare** in due equazioni e due incognite. I numeri a, b, a', b' si dicono **coefficienti**; i numeri c, c', **termini noti**.

Noi supporremo che a e b non siano entrambi nulli e, analogamente, che a' e b' non siano en-

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y + z = 10 \\ y + z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y + z = 10 \\ z = 1 \end{cases}$$

È facile concludere che la soluzione è $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$.

È stato soprattutto in vista del calcolo automatico che abbiamo voluto elencare esplicitamente l'operazione 4), malgrado il suo carattere ovvio.

Ancora un'osservazione: per i sistemi in due incognite abbiamo trovato una rappresentazione geometrica. Anzi eravamo partiti dalla constatazione che un'equazione lineare in due incognite rappresenta una retta. Che tipo di rappresentazione geometrica possiamo trovare per le equazioni di un sistema come il (17)? E per le equazioni con $3, 4, \ldots, 100, \ldots$ incognite?

Non vogliamo dare risposta a queste domande; dopo avere (speriamo) stuzzicato la curiosità del lettore, lo invitiamo a fare da sé qualche congettura, in attesa di un ulteriore progresso dei suoi studi matematici.

Esercizi

1 Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ 6x - 3y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Preso un foglio di carta millimetrata, dare una rappresentazione grafica di ciascun sistema; confrontare i risultati (approssimati) ottenuti graficamente con quelli ottenuti con il calcolo esatto.

2 Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2{,}001\,y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + \sqrt{2}\,y = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}\,x + y = -\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x + ay = b \\ -ax + y = c \end{cases}$$

(a, b, c sono numeri assegnati)

3 Un numero di due cifre ha la somma delle cifre uguale ad 8. Scambiando fra loro le cifre si ottiene un numero che supera di 18 il numero assegnato. Trovare questo numero.

11 Far vedere che il sistema in due equazioni e tre incognite

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni (x, y, z). Possibilmente, descrivere queste soluzioni, in qualche modo.

12 Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ 3x - y - z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + ay + a^2z = d \\ x + by + b^2z = e \\ x + cy + c^2z = f \end{cases}$$

(a, b, c, d, e, f sono parametri)

13 Dati nel piano tre punti, esistono tre cerchi con centri in essi e tangenti fra loro esternamente?

Analisi di un sistema lineare e formule risolutive

17.4 Ritorniamo sul sistema (11), col proposito di caratterizzare il suo comportamento mediante lo studio dei coefficienti a, b, a', b' e dei termini noti c, c'. È importante ancora una volta la traduzione del nostro problema in forma geometrica. Pensiamo dunque alle due rette $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ che hanno rispettivamente le equazioni

$$ax + by = c \qquad a'x + b'y = c'$$

Supponiamo che a e b non siano entrambi nulli; cosí pure a' e b'.

Cominciamo col chiederci se le due rette sono incidenti o parallele. Sappiamo che le parallele ad $\mathfrak{R}$ e ad $\mathfrak{R}'$ rispettivamente, mandate per l'origine O, hanno le equazioni

$$ax + by = 0 \qquad a'x + b'y = 0 \tag{18}$$

Allora $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{R}'$ sono parallele quando e solamente quando queste due rette coincidono.

Per decidere quando le rette (18) coincidono si può fare cosí: si prende un punto Q, diverso da O, della seconda retta e si vede se sta sulla prima. Si ve-

11 Far vedere che il sistema in due equazioni e tre incognite

$$\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni (x, y, z). Possibilmente, descrivere queste soluzioni, in qualche modo.

12 Risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 2x+y-2z=2 \\ 3x-y-z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+ay+a^2z=d \\ x+by+b^2z=e \\ x+cy+c^2z=f \end{cases}$$

(a, b, c, d, e, f sono parametri)

13 Dati nel piano tre punti, esistono tre cerchi con centri in essi e tangenti fra loro esternamente?

Analisi di un sistema lineare e formule risolutive

17.4 Ritorniamo sul sistema (11), col proposito di caratterizzare il suo comportamento mediante lo studio dei coefficienti a, b, a', b' e dei termini noti c, c'. È importante ancora una volta la traduzione del nostro problema in forma geometrica. Pensiamo dunque alle due rette $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ che hanno rispettivamente le equazioni

$$ax+by=c \qquad a'x+b'y=c'$$

Supponiamo che a e b non siano entrambi nulli; cosí pure a' e b'.

Cominciamo col chiederci se le due rette sono incidenti o parallele. Sappiamo che le parallele ad $\mathfrak{R}$ e ad $\mathfrak{R}'$ rispettivamente, mandate per l'origine O, hanno le equazioni

$$ax+by=0 \qquad a'x+b'y=0 \qquad (18)$$

Allora $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{R}'$ sono parallele quando e solamente quando queste due rette coincidono.

Per decidere quando le rette (18) coincidono si può fare cosí: si prende un punto Q, diverso da O, della seconda retta e si vede se sta sulla prima. Si ve-

8 Trovare direttrice, asse e fuoco delle parabole rappresentate dalle seguenti equazioni:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 10 \quad , \quad y = (x+1)^2 + (x+2)^2 \quad , \quad y = -x^2 + 3x + 1$$

9 Trovare l'equazione della parabola che ha il fuoco nel punto $F \leftrightarrow (3, 5)$ e ha come direttrice la retta $y = 1$. Idem per la parabola che ha il fuoco nel punto $(5, 3)$ e ha come direttrice la retta $x = 1$.

10 Considerare ancora lo specchio parabolico (fig. 3); supponiamo che sul fuoco vi sia una sorgente luminosa. Dimostrare che i raggi che arrivano su un piano perpendicolare all'asse hanno tutti la stessa lunghezza.

11 Un cerchio col centro nel fuoco di una parabola quanti punti può avere in comune con la parabola?

** **12** Data una parabola $\mathcal{P}$ mediante il fuoco F e la direttrice $\mathcal{D}$, costruire l'intersezione di $\mathcal{P}$ con una retta $\mathcal{R}$ perpendicolare alla direttrice. Detto Q il punto di intersezione di $\mathcal{R}$ con $\mathcal{D}$, e detta $\mathcal{T}$ la retta asse del segmento $[F, Q]$, il punto cercato è evidentemente l'intersezione di $\mathcal{T}$ con $\mathcal{R}$.
Dimostrare che la retta $\mathcal{T}$ ha un solo punto in comune con $\mathcal{P}$.
(Una retta che ha un solo punto in comune con una parabola si può dire *tangente* alla parabola).
È interessante notare che il punto Q ed il fuoco F risultano simmetrici rispetto alla retta tangente $\mathcal{T}$.

18.2 Un'equazione del tipo

Le equazioni di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{10}$$

dove a, b, c sono numeri assegnati, con $a \neq 0$, si dice *equazione di secondo grado*. Non è la prima volta che troviamo equazioni di secondo grado: abbiamo già considerato nel cap. 11 equazioni del tipo $x^2 = l$ ossia $x^2 - l = 0$. Un'equazione come questa non ha soluzioni se è $l < 0$, ha solo la soluzione nulla se è $l = 0$, mentre ha due soluzioni se è $l > 0$: $x_1 = \sqrt{l}$, $x_2 = -\sqrt{l}$. Ricordiamo che con il simbolo $\sqrt{l}$ noi indichiamo la radice quadrata *non negativa* di l; teniamo anche presente che è essenziale cercare le soluzioni del nostro problema nell'insieme dei numeri reali; infatti, come sappiamo dal cap. 11, l'equazione

Allora, le soluzioni sono due: $x = 0$, $x = p$.
La prima soluzione era già scontata perché sapevamo già che l'origine sta sulla parabola.

Tenendo conto della prima (o della seconda) equazione del sistema si trova che i punti di intersezione sono $(0, 0)$ e (p, p^2). Notiamo che ogni retta diversa dagli assi taglia la parabola in un ulteriore punto, oltre l'origine.

Esercizi

1 Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado ripetendo passo per passo il procedimento generale indicato all'inizio del § («completamento del quadrato»...):

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \quad , \quad x^2 + 2x - 10 = 0 \quad , \quad 2x^2 - 3x - 1 = 0$$
$$4x^2 - 4ax + (a^2 - 1) = 0 \quad , \quad 2x^2 - 7x + 3 = 0 \quad ; \quad 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

2 Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado applicando la formula risolutiva (che, per ovvio motivo di praticità, deve essere ricordata a memoria):

$$9x^2 - 9x + 2 = 0 \quad , \quad 3x^2 - 5x + 10 = 0 \quad , \quad 9x^2 + 3x + 1 = 0$$
$$x^2 + mx + (m^2 - 1) = 0 \quad , \quad x^2 + 2mx + (m^2 + 1) = 0$$
$$abx^2 - (a^2 + b^2)\, x + ab = 0$$

3 Disponendo di un piccolo calcolatore (che fornisca la radice quadrata!) calcolare, con l'approssimazione consentita dallo strumento, le soluzioni delle seguenti equazioni:

$$x^2 + 3\sqrt{2}x + 4 = 0 \ , \ x^2 - x + 0{,}003 = 0 \ , \ x^2 + x + 0{,}003 = 0$$
$$x^2 + 10x - 10 = 0 \ , \ x^2 + 100x - 100 = 0 \ , \ x^2 + 1000x - 1000 = 0$$

(Si osserva qualcosa di interessante nei risultati delle tre ultime equazioni?).

Se si dispone di un calcolatore programmabile, eseguire il programma della formula risolutiva.

* **4** Considerare le soluzioni delle seguenti equazioni (in cui è $a \neq 0$, $c \neq 0$, $b^2 - 4ac > 0$):

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad a + bz + cz^2 = 0$$

Che relazioni ci sono fra le soluzioni della prima e quelle della seconda? Che succede se è $a = c$? Analogamente, che relazioni ci sono fra le soluzioni delle due seguenti equazioni?

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad ax^2 - bx + c = 0\ ?$$