Liceo Classico "U. Foscolo"

Da: "Maria Cristina" <mariacristina.melardi@tin.it>
Data: venerdì 13 giugno 2014 19:34
A: <pvpc03000b@istruzione.it>
Allega: pag.87.pdf; pag.88.pdf; pag.89.pdf; pag.92.pdf; pag.93.pdf; pag.167.pdf; pag.168.pdf; pag.169.pdf; pag.238.pdf
Oggetto: Invio per posta elettronica: pag.87, pag.88, pag.89, pag.92, pag.93, pag.167, pag.168, pag.169, pag.238

COMPITI DELLE VACANZE IIA PROF LORINI
Il messaggio è pronto per essere inviato con i seguenti file o collegamenti allegati:
pag.87
pag.88
pag.89
pag.92
pag.93
pag.167
pag.168
pag.169
pag.238

- preso un qualsiasi numero reale ε, che potrebbe essere anche molto piccolo, è possibile dimostrare che esiste un intero $\bar{s}$ (che dipende da ε) tale che $\forall n > \bar{s}$ si abbia che $2 - \varepsilon < a_{\bar{s}} < 2 + \varepsilon$? Cosa possiamo dire di $\lim_{n\to\infty} a_n$?

ESERCIZIO SVOLTO

(11) Dimostrare, applicando la definizione di limite, che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+7}{n^2+4} = 3$$

Occorre dimostrare che, preso un qualsiasi numero reale $\varepsilon > 0$, vale definitivamente la disuguaglianza:

$$\left|\frac{3n^2+7}{n^2+4} - 3\right| < \varepsilon$$

che equivale alla:

$$\left|\frac{-5}{n^2+4}\right| < \varepsilon$$

da cui si ricava, con pochi passaggi:

$$n^2 > \frac{5-4\varepsilon}{\varepsilon}$$

Se $5 - 4\varepsilon < 0$, cioè se $\varepsilon > \frac{5}{4}$ la disequazione è verificata per ogni valore di n.

Se $5 - 4\varepsilon \geq 0$, si può estrarre la radice di ambedue i membri della disequazione, ottenendo $n < -\sqrt{\frac{5-4\varepsilon}{\varepsilon}}$, oppure $n > \sqrt{\frac{5-4\varepsilon}{\varepsilon}}$.

La prima delle due disuguaglianze non interessa, dal momento che n non può assumere valori negativi; consideriamo, quindi, solo la seconda. Sia $\bar{n}$ l'intero immediatamente successivo a $\sqrt{\frac{5-4\varepsilon}{\varepsilon}}$. Per ogni $n \geq \bar{n}$ risulta verificata la disequazione scritta all'inizio, quindi si è dimostrato che $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+7}{n^2+4} = 3$.

(12) Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+3}{n^2} = 1$.

(13) Dimostrare, applicando la definizione di limite, che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+5}{3n^2-1} = \frac{2}{3}$$

e che:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{9n+4}{n}} = 3$$

ESERCIZIO SVOLTO

14 Applicando la definizione di limite, verificare che $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{2n^2+1}$ non è 1.

Se fosse $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{2n^2+1} = 1$, dovrebbe verificarsi da un certo indice in poi la disequazione:

$$\left|\frac{n^2+1}{2n^2+1} - 1\right| < \varepsilon$$

che, sviluppata, dà:

$$\left|\frac{-n^2}{2n^2+1}\right| < \varepsilon$$

e infine:

$$n^2(2\varepsilon - 1) > -\varepsilon$$

Se $2\varepsilon - 1 > 0$, si ha $n^2 > \dfrac{-\varepsilon}{2\varepsilon - 1}$. Poiché il primo membro è sempre positivo e il secondo negativo, la disequazione è verificata per ogni indice n.

Se invece $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$, si ha $n^2 < \dfrac{\varepsilon}{1-2\varepsilon}$, da cui si ricava $0 < n < \dfrac{\varepsilon}{1-2\varepsilon}$.

Quindi la disequazione iniziale vale solo per un numero limitato di indici e non per ogni indice da un certo intero in poi. Non si può quindi affermare che il limite della successione è 1.

15 Applicando la definizione di limite di una successione, verificare che $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n}$ non è 3.
(Occorre verificare che non è vero che preso un qualsiasi valore reale ε la successione definitivamente cade nell'intervallo $(3-\varepsilon;\ 3+\varepsilon)$).

16 Sia a_n una successione di numeri reali. Dimostrare che se a_n è infinitesima, lo è anche la successione $b_n = |a_n|$ e viceversa.

17 Sia a_n una successione di numeri positivi. Dimostrare che se $\lim a_n = +\infty$, allora $\lim \dfrac{1}{a_n} = 0$, e viceversa.

ESERCIZIO SVOLTO

18 Studiare la successione b^n, dove b è un numero reale non nullo. Classificare i vari comportamenti possibili.

Abbiamo dimostrato all'inizio di questo capitolo che se $b > 1$ la successione b^n tende a $+\infty$. Nel caso che sia $b = 1$, si ha la successione costantemente uguale a 1 il cui limite è 1.

Se $0 < b < 1$ si può ricorrere al teorema dimostrato nell'esercizio precedente, scrivendo che $b^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^n}$. Poiché $\frac{1}{b} > 1$, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^n = +\infty$ e quindi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^n} = 0$.

Se $-1 < b < 0$ si osserva che $\lim_{n\to\infty} |b^n| = 0$; per un teorema dimostrato in un esercizio precedente possiamo affermare $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$.
Nel caso in cui $b < -1$, i termini della successione hanno valore assoluto crescente, ma segno alterno. La successione, quindi, non ha limite.

19 La successione $a_n = n + (n-1)\sin\frac{n\pi}{2}$ tende a $+\infty$?

20 In un sacchetto ci sono inizialmente palline bianche e azzurre. Aggiungiamo successivamente palline azzurre; indichiamo con a_n la probabilità di estrarre una pallina azzurra e con b_n la probabilità di estrarre una pallina bianca dopo aver aggiunto n palline azzurre. Quale è il comportamento della successione a_n? E della successione b_n?

21 Variante dell'esercizio precedente: si aggiungono ogni volta due palline azzurre e tre bianche. Si ricerca ancora il comportamento delle successioni a_n e b_n.

22 Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n+1}$$

calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^n}$.

23 È dato un quadrato P_1Q_1RS di lato unitario. Si costruiscono due successioni di punti P_n e Q_n nel modo seguente:

- P_2 è il punto di intersezione fra le diagonali Q_1S e P_1R.
- Q_n è il punto di intersezione fra il lato RQ_1 e la perpendicolare a tale lato abbassata da P_n.
- P_{n+1} è il punto di intersezione fra la diagonale P_1R e il segmento SQ_n.

a esprimere in funzione di n le lunghezze $\overline{RQ_n}, \overline{P_nQ_n}, \overline{Q_nP_{n+1}}$;

b calcolare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{Q_nP_{n+1}}}{\overline{P_nQ_n}}$$

24 Dato il fascio di cerchi C_n di equazione

$$x^2 + y^2 - 2ny = 0$$

dove il parametro n è un intero naturale, siano P_n i punti di ascissa positiva ottenuti dall'intersezione della tangente a C_n nel punto $(0, 2n)$ con C_{n+1}.

a trovare le coordinate del punto P_n;

b individuare l'equazione della curva cui appartengono tutti i P_n;

Paragrafo 2.2

ESERCIZIO SVOLTO

(34) Calcolare il limite della successione:

$$a_n = \frac{4n^2+2n-1}{3n^2+n+10}$$

Si possono dividere numeratore e denominatore per n^2 (l'eventualità che sia $n = 0$ non ci interessa: stiamo considerando valori molto grandi di n)

$$a_n = \frac{\dfrac{4n^2+2n-1}{n^2}}{\dfrac{3n^2+n+10}{n^2}} = \frac{4+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{10}{n^2}}$$

Chiamiamo b_n e c_n le successioni rispettivamente a numeratore e a denominatore. Per quanto abbiamo visto riguardo alle operazioni sui limiti, si ha:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 4 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 4$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 3 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + 10\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 3$$

Quindi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} = \frac{4}{3}$.

(35) Calcolare i limiti delle seguenti successioni:

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}},\quad \frac{n}{n+1},\quad \frac{2n+3}{5n+7},\quad \frac{2n^2+3n+5}{3n^2+5n+2}$$

(36) Calcolare i limiti delle seguenti successioni:

$$n^2-n,\quad \frac{n+1}{n^2+1},\quad \frac{n^2-3}{n+1},\quad \frac{n^4-1}{n^4+1}$$

(37) Si consideri una successione del tipo $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, dove P e Q sono polinomi. Che cosa si può dire, in termini generali, per il suo limite?
(Gli esempi già considerati dovrebbero rendere più facile la risposta).

(38) Fra le seguenti successioni, individuare quelle che non sono né convergenti né divergenti:

$$a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{2n}\quad b_n = \sin\frac{(3n-2)\pi}{4}\quad c_n = (-1)^n\frac{n^2}{n+1}\quad d_n = n^2+n(-1)^n$$

$$e_n = \frac{n+3}{n^2}(-1)^n\quad f_n = \frac{2^n}{3^{n-10}}\quad g_n = \frac{(-1)^n+1}{2}n\quad h_n = \frac{(-1)^{2n}+1}{2}n$$

39 Calcolare i limiti delle seguenti successioni:

$$a_n = \cos\frac{n\pi}{2} + n^2 \quad b_n = 3 + \frac{n^2+1}{n^3-1} \quad c_n = \frac{2n+4}{3n-1} + \frac{5n-11}{n+2}$$

$$d_n = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{3n-1} \quad e_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n+1} \quad f_n = \left(\frac{2n+1}{n-4}\right)^4$$

40 Calcolare i limiti delle seguenti successioni:

$$a_n = \frac{n^2+3n-1}{2n\sqrt{n}} \quad b_n = \frac{\sqrt{n^3}+2n+7}{5\sqrt{n^3}+n+1} \quad c_n = \frac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$d_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \quad e_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n+1}} + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n}} \quad f_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{3+\cos\frac{n\pi}{2}}$$

41 Sia $q(n)$ la somma dei quadrati dei primi n interi naturali. Calcolare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q(n)}{n^3}$$

42 In un riferimento cartesiano ortogonale di origine O siano date le parabole P di vertice $(1, -1)$ e passante per l'origine e P', simmetrica di P rispetto all'asse y. Un fascio di rette di equazione $y = nx$, dove n è un intero naturale, interseca P e P' in A e in B rispettivamente, oltre che nell'origine. Calcolare:

$$\lim_{n\to\infty}(\overline{OA}+\overline{OB}) \qquad \lim_{n\to\infty}(\overline{OA}-\overline{OB}) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$$

43 Si consideri in un riferimento cartesiano ortogonale un ramo di iperbole equilatera di equazione $y = \frac{1}{x}$, con $x > 0$.

Sia P_n il punto dell'iperbole di ascissa n, con n numero naturale (ovviamente $n \neq 0$). In P_n tracciamo la tangente all'iperbole, che incontra l'asse x nel punto A_n e la normale, che incontra l'asse x in B_n.

Si verifichi che mentre l'area del triangolo $A_nB_nP_n$ tende a un limite finito per n che tende a ∞, il perimetro diverge.

44 In un riferimento cartesiano ortogonale di origine O si disegni la semicirconferenza di centro $C \leftrightarrow (1, 0)$ e raggio 1 appartenente al primo quadrante. Si considerino i punti $P_n \leftrightarrow (0, n)$, con n numero naturale, e sia t_n la tangente mandata da P_n alla circonferenza, diversa dall'asse y. Sia T_n il punto di contatto fra la circonferenza e la t_n.

a calcolare le coordinate x_n e y_n di T_n e la lunghezza del segmento P_nT_n;

b calcolare $\lim_{n\to\infty} x_n$ e $\lim_{n\to\infty} y_n$;

c calcolare il limite per n che tende a $+\infty$ del rapporto fra l'area del triangolo OP_nT_n e l'area del rettangolo di vertici P_n, O e C.

39 Calcolare i limiti delle seguenti successioni:

$$a_n = \cos\frac{n\pi}{2} + n^2 \quad b_n = 3 + \frac{n^2+1}{n^3-1} \quad c_n = \frac{2n+4}{3n-1} + \frac{5n-11}{n+2}$$

$$d_n = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{3n-1} \quad e_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n+1} \quad f_n = \left(\frac{2n+1}{n-4}\right)^4$$

40 Calcolare i limiti delle seguenti successioni:

$$a_n = \frac{n^2+3n-1}{2n\sqrt{n}} \quad b_n = \frac{\sqrt{n^3}+2n+7}{5\sqrt{n^3}+n+1} \quad c_n = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$$d_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \quad e_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n+1}} + \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n}} \quad f_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{3+\cos\frac{n\pi}{2}}$$

41 Sia $q(n)$ la somma dei quadrati dei primi n interi naturali. Calcolare:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q(n)}{n^3}$$

42 In un riferimento cartesiano ortogonale di origine O siano date le parabole P di vertice $(1, -1)$ e passante per l'origine e P', simmetrica di P rispetto all'asse y. Un fascio di rette di equazione $y = nx$, dove n è un intero naturale, interseca P e P' in A e in B rispettivamente, oltre che nell'origine. Calcolare:

$$\lim_{n\to\infty}(\overline{OA} + \overline{OB}) \qquad \lim_{n\to\infty}(\overline{OA} - \overline{OB}) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$$

43 Si consideri in un riferimento cartesiano ortogonale un ramo di iperbole equilatera di equazione $y = \frac{1}{x}$, con $x > 0$.

Sia P_n il punto dell'iperbole di ascissa n, con n numero naturale (ovviamente $n \neq 0$). In P_n tracciamo la tangente all'iperbole, che incontra l'asse x nel punto A_n e la normale, che incontra l'asse x in B_n.
Si verifichi che mentre l'area del triangolo $A_nB_nP_n$ tende a un limite finito per n che tende a ∞, il perimetro diverge.

44 In un riferimento cartesiano ortogonale di origine O si disegni la semicirconferenza di centro $C \leftrightarrow (1, 0)$ e raggio 1 appartenente al primo quadrante. Si considerino i punti $P_n \leftrightarrow (0, n)$, con n numero naturale, e sia t_n la tangente mandata da P_n alla circonferenza, diversa dall'asse y. Sia T_n il punto di contatto fra la circonferenza e la t_n.

a calcolare le coordinate x_n e y_n di T_n e la lunghezza del segmento P_nT_n;

b calcolare $\lim_{n\to\infty} x_n$ e $\lim_{n\to\infty} y_n$;

c calcolare il limite per n che tende a $+\infty$ del rapporto fra l'area del triangolo OP_nT_n e l'area del rettangolo di vertici P_n, O e C.

Paragrafo 3.3

(38) Trovare il dominio di definizione delle seguenti funzioni:

a $x \to \dfrac{2-x}{x^2-1}$ **b** $x \to \sqrt{x^2-5x+7}$ **c** $x \to \sqrt{4-x^2}$

d $x \to \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$ **e** $x \to \sqrt{|x-2|-|x-3|}$ **f** $x \to \dfrac{1}{\sqrt{1+x+\sqrt{x}}}$

(39) I grafici della funzione:

$$f\colon x \to \frac{x^2-1}{x-1} \quad \text{e} \quad g\colon x \to x+1$$

coincidono?

ESERCIZIO SVOLTO

(40) Trovare l'insieme di definizione delle funzioni:

a $x \to \sqrt{\cos x}$ **b** $x \to \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x}$ **c** $x \to \dfrac{1}{\sqrt{\sin 2x - \cos x}}$

a La funzione $x \to \sqrt{\cos x}$ è periodica, quindi la si può studiare su un intervallo di ampiezza pari al periodo (ad esempio l'intervallo $[-\pi, \pi]$), per poi estendere a tutto $\mathbb{R}$ i risultati ottenuti. In $[-\pi, \pi]$ la funzione $x \to \sqrt{\cos x}$ è definita solo se $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. Operando su questo intervallo traslazioni di modulo $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, si ottengono infiniti intervalli $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ la cui unione è il dominio della funzione data.

b $x \to \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x}$

Ricorrendo alle formule di addizione, si ricava che $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. Quindi la funzione può essere riscritta così:

$$x \to \frac{1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}$$

Perché sia definita, occorre che sia $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \ne 0$, cioè:

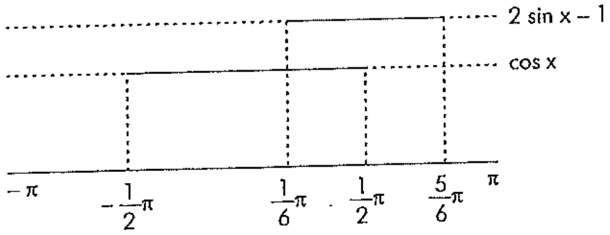
$$x+\frac{\pi}{3} \ne \frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e quindi:

$$x \ne \frac{\pi}{6}+k\pi$$

c $x \to \dfrac{1}{\sqrt{\sin 2x - \cos x}}$

Occorre che sia $\sin 2x - \cos x > 0$. Ma $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, quindi $\cos x(2\sin x - 1) > 0$. Lo studio del segno dei due fattori di questa espressione, rappresentato nel grafico, ci permette di individuare gli intervalli per i quali il prodotto è positivo.



Anche in questo caso lo studio viene condotto limitatamente all'intervallo $[-\pi, \pi]$, essendo la funzione periodica di periodo 2π. Si ottiene che il dominio della funzione è dato dal seguente insieme:

$$\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi, \pi\right]$$

Per trovare tutto il dominio della funzione, basta operare sull'insieme ottenuto mediante traslazioni di modulo $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

41 Trovare l'insieme di definizione delle funzioni:

a $x \to \sqrt{\dfrac{\cos 2x}{3\cos x - \sqrt{3}\sin x}}$ **b** $x \to \sqrt{\dfrac{2+|x-2|}{3+|x-3|}}$ **c** $x \to \dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos 2x}}$

d $x \to \sqrt{\dfrac{2-x}{1-x^2}}$ **e** $x \to \dfrac{|2-x|}{x^3 - 4|x|}$ **f** $x \to \dfrac{4x-1}{x^3+8}$

42 Determinare l'intervallo di $\mathbb{R}$ in cui è vera l'uguaglianza:

$$x - 3 = -\sqrt{(x-3)^2}$$

ESERCIZIO SVOLTO

43 In quali intervalli di $\mathbb{R}$ le seguenti funzioni hanno valore positivo?

a $x \to \dfrac{|x-1|}{|x|-1}$ **b** $x \to \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

a Occorre anzitutto osservare che i valori 1 e -1 annullano il denominatore della frazione che esprime la funzione, e quindi non possono far parte del suo dominio di definizione. Si analizza la forma assunta dalla funzione nei vari casi che si possono presentare:

se $x < 0$, $x \neq -1$ e quindi $f(x) = \dfrac{1-x}{-x-1}$, il numeratore è certamente positivo, mentre il denominatore è positivo per $x < -1$

se $0 \leq x < 1$ e quindi $f(x) = \dfrac{1-x}{x-1} = -1$, la funzione ha valori negativi.

Se $x > 0$ e quindi $f(x) = \dfrac{x-1}{x-1}$, la funzione ha valori positivi. In conclusione, la funzione ha valori positivi per $x < -1$ oppure per $x > 1$.

b a disequazione $sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) > 0$ è verificata se:

$$0 + 2k\pi < 2x - \frac{\pi}{3} < \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

e cioè se:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dopo aver opportunamente semplificato, si ottiene che la funzione è positiva per i valori di x tali che:

$$\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

44 In quali intervalli di $\mathbb{R}$ le seguenti funzioni hanno valore positivo?

a $x \to -x^2 - 2x + 8$ **b** $x \to \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ **c** $x \to -\sqrt{x^2 - x + 3}$

d $x \to \sqrt{2x + 3} + x - 1$ **e** $x \to \dfrac{2x + 1}{x - 3}$ **f** $x \to \dfrac{sin\,2x}{cos\,x}$

45 Studiare il segno delle seguenti funzioni:

a $x \to \sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}$ **b** $x \to \dfrac{x - [x]}{x}$ **c** $x \to -\sqrt{cos\,x}$

d $x \to 3|x+1| - 2|x| + x$ **e** $x \to \sqrt{cos\,x} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **f** $x \to \dfrac{3x + 1}{x^2 + 3x - 4}$

46 Quali fra le seguenti funzioni sono pari, dispari, o né pari né dispari?

a $x \to \dfrac{x^2 - x + 1}{x^4 + 1}$ **b** $x \to \dfrac{x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4}{x^2 + 2}$ **c** $x \to sin\,x + tan\,x$

d $x \to 3|x+1| - 2|x| + x^2$ **e** $x \to \dfrac{x^3 + 5x + 7}{x^5 - 4x^3}$ **f** $x \to 1 - \dfrac{x^2 - 1}{x^4 + 2}$

47 Dei seguenti enunciati dire se sono veri o falsi: se sono veri, trovare una dimostrazione, se sono falsi un controesempio:

a la somma di due funzioni pari è pari;

b la somma di due funzioni dispari è dispari;

c il prodotto di due funzioni pari è pari;

b si sa che, preso un gran numero di lampadine, tutte dello stesso tipo che ci interessa, dopo 800 ore di funzionamento ne sono ancora buone la metà.

Trovare l'espressione di $p(t)$.

Paragrafo 4.3

49 Calcolare:

a $log_3 27$ **b** $log_3 \frac{1}{9}$ **c** $log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$ **d** $log_3(\sqrt[7]{3^2})$

50 Calcolare:

a $log_8 \frac{\sqrt{2}}{2}$ **b** $log_4 8$ **c** $log_{\sqrt{2}} 64$ **d** $log_8(\sqrt[5]{16})$

51 Se $log_a b = c$, trovare il valore dei seguenti logaritmi:

a $log_{\frac{1}{a}} b$ **b** $log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b}$ **c** $log_{a \cdot b} b$ **d** $log_{\sqrt{a}} \sqrt{b}$

52 Tracciare il grafico della funzione $f: x \to log_a x$ con $0 < a < 1$, poi rispondere alle seguenti domande:

a qual è il valore della funzione per $x = \frac{1}{a}$?

b per quali valori di x la funzione ha valori compresi fra 2 e 3?

c se $x_1 < x_2$, cosa si può dire di $log_a x_1$ e $log_a x_2$?

d la funzione assume un valore minimo? Se sì, quale?

53 Dimostrare che $log_{10} 3$ è irrazionale.

54 Generalizzando il contenuto dell'esercizio precedente: se n è un intero fissato, in quali casi il logaritmo in base n di un numero razionale è razionale?

55 Trovare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

a $x \to log_3(1-x)$ **b** $x \to log_{0.5}\left(\frac{1+x}{x-3}\right)$

c $x \to log_{10}\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)$ **d** $x \to \sqrt{log_a x}$

e $x \to log_2 2x - log(2x-1)$ **f** $x \to log_a \sin x$

56 Le funzioni $f: x \to log_{10}(x^2-1)$ e $g: x \to log_{10}(x-1) + log_{10}(x+1)$ hanno lo stesso campo di esistenza?

57 Siano b e c due numeri positivi diversi da 1. Dimostrare che:

$$log_b c \cdot log_c b = 1$$