Liceo Classico "U. Foscolo"

Da: "Maria Cristina" <mariacristina.melardi@tin.it>
Data: venerdì 13 giugno 2014 19:33
A: <pvpc03000b@istruzione.it>
Allega: pag.147.pdf; pag.148.pdf; pag.169.pdf; pag.170.pdf; pag.172.pdf; pag.173.pdf
Oggetto: Invio per posta elettronica: pag.147, pag.148, pag.169, pag.170, pag.172, pag.173

COMPITI DELLE VACANZE IA PROF LORINI
Il messaggio è pronto per essere inviato con i seguenti file o collegamenti allegati:
pag.147
pag.148
pag.169
pag.170
pag.172
pag.173

ESERCIZI

Paragrafo 5.1, 5.2, 5.3

(1) Data nel piano cartesiano la circonferenza di centro $Q \leftrightarrow (a, 0)$ e di raggio r, $0 < r < a$, individuare mediante la pendenza p le rette passanti per l'origine che gli sono secanti, tangenti o esterne.

(2) Scrivere l'equazione della circonferenza con centro nel punto $C \leftrightarrow (3, 4)$ e tangente all'asse y.

(3) Scrivere l'equazione della circonferenza con centro nel punto $C \leftrightarrow (2, 4)$ e tangente alla retta di equazione $y = \frac{1}{2}x$.

(4) Dimostrare che l'asse radicale di due circonferenze è una retta perpendicolare alla retta dei centri.

(5) Scrivere l'equazione della circonferenza tangente nell'origine all'asse y e passante per $A \leftrightarrow (2, 4)$. Determinare inoltre la parabola con asse parallelo all'asse y tangente in A alla circonferenza e con vertice di ascissa 5.

(6) Date due circonferenze scritte in forma normale come riconoscere se esse sono concentriche?

(7) Per ciascuna delle circonferenze rappresentate dalle seguenti equazioni trovare, senza fare i calcoli, un asse di simmetria

a $x^2 + y^2 - x - 4 = 0$ **b** $x^2 + y^2 + 3y - 10 = 0$

c $x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$ **d** $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$

(8) Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i seguenti tre punti (controllare prima che non siano allineati): $A \leftrightarrow (3, 2)$, $B \leftrightarrow (4, 2)$, $C \leftrightarrow (0, 0)$.

(9) Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i seguenti tre punti: $A \leftrightarrow (-1, -1)$, $B \leftrightarrow (3, 2)$, $C \leftrightarrow (2, 3)$.

(10) Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i seguenti tre punti: $A \leftrightarrow (0, 3)$, $B \leftrightarrow (3, 2)$, $C \leftrightarrow (2, 3)$.

(11) Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i seguenti tre punti: $A \leftrightarrow (0, 1)$, $B \leftrightarrow (2, 0)$, $C \leftrightarrow (4, 6)$.

(12) Dati due punti A e B dimostrare che l'insieme dei punti P tali che $\frac{AP}{BP} = k$, con k co-

stante positiva diversa da 1, è una circonferenza, detta *circonferenza di Apollonio* (prendere un sistema di assi cartesiani tali che A e B siano sull'asse x simmetrici rispetto all'origine). Trovare le coordinate del centro.

13 Dati i punti $A \leftrightarrow (5,3)$ e $B \leftrightarrow (-8,-2)$ determinare il luogo dei punti P tali che le rette PA e PB risultino fra loro perpendicolari. Potete usare Cabri per determinare il luogo in generale e poi scrivere l'equazione del luogo particolare dati A e B.

14 Data la parabola $y = -x^2 + 2x$ e la retta di equazione $3x + 4y - 12 = 0$ determinare fra i punti della parabola quello che ha la minima distanza dalla retta data.

15 Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C \leftrightarrow (5,3)$ e passante per il punto $P \leftrightarrow (2,6)$. Scrivere l'equazione della parabola tangente alla circonferenza nei suoi due punti di intersezione con l'asse x.

16 Determinare l'equazione della circonferenza avente il centro in $C \leftrightarrow (2,-4)$ e tangente alla retta $x + y = 0$.

17 Determinare l'equazione della circonferenza passante per i punti $A \leftrightarrow (0,2)$ e $B \leftrightarrow (0,8)$ e avente il centro sulla retta $x - 2y + 4 = 0$.

18 Determinare le equazioni delle circonferenze tangenti all'asse y e alla retta $3x - 4y = 0$ e aventi il centro sulla retta $y = 6$.

19 Determinare l'equazione delle circonferenze tangenti alla retta $x - 2y + 12 = 0$, aventi il centro sulla bisettrice del primo e terzo quadrante e aventi raggio uguale a $\sqrt{5}$.

20 Trovare l'equazione della circonferenza passante per $O \leftrightarrow (0,0)$, $A \leftrightarrow (4,0)$, $B \leftrightarrow (0,6)$; trovare poi le equazioni delle rette tangenti in questi tre punti. Calcolare l'area del quadrilatero individuato dalle tre tangenti e dalla retta AB.

21 Trovare le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ e uscenti dal punto $P(3,-9)$. Farne la costruzione geometrica.

22 Determinare l'equazione della circonferenza tangente alle due rette parallele $2x + y = 0$ e $2x + y = -8$ e avente il centro di ascissa 1.

23 Trovare i lati del rettangolo inscritto nella circonferenza $x^2 + y^2 = 25$ e avente perimetro uguale a 24.

24 Data una circonferenza di raggio r e una sua tangente, si determini su questa un punto M tale che la secante da M passante dal centro O abbia la sua parte esterna MR lunga i $\frac{9}{16}$ del diametro. Detta S l'altra intersezione della secante con la circonferenza ed essendo P il punto di contatto della tangente, si trovi l'area del triangolo PRS.

25 Data una circonferenza di centro C e raggio r e una tangente in un suo punto P, sia Q

ESERCIZI

Paragrafo 6.1

1 Scrivere l'equazione dell'ellisse che ha i fuochi nei punti $(\sqrt{3},0)$ e $(-\sqrt{3},0)$ e i vertici in $(2,0)$ e $(-2,0)$. Cosa cambia se si scambiano le ascisse di tali punti con le ordinate? Disegna entrambe le curve.

2 Di un'ellisse si sa che l'eccentricità è $\frac{3}{4}$ e che il semiasse minore ha lunghezza 1; trovare l'equazione dell'ellisse.

3 È data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

a disegnarla

b sia P un punto di tale ellisse ed F_1 ed F_2 i suoi fuochi; prolungate il segmento F_2P di un segmento di lunghezza F_1P e chiamate F' questo punto. Dimostrare che la bisettrice dell'angolo F_1PF' ha un solo punto in comune con l'ellisse.

4 Sia d la retta di equazione $x=\frac{25}{4}$; scrivere il luogo geometrico descritto dal punto $P \leftrightarrow (x,y)$ tale che il rapporto fra la distanza di P dal punto $F \leftrightarrow (4,0)$ e dalla retta d sia $\frac{4}{5}$; che figura ottieni?

5 Verifica che in generale se d è la retta di equazione $x=\frac{a^2}{c}$ e se sono verificate le seguenti ipotesi

a $a>0$ $c>0$ e $a>c$

b $a^2=b^2+c^2$

c F_1 ha coordinate $(c,0)$

d H è la proiezione di P sulla retta d

allora il luogo dei punti P tali che $\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PH}}=\frac{c}{a}$ è l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. La retta d è la direttrice relativa al fuoco F_1.

6 Siano V_1 e V_2 i vertici dell'ellisse dell'esercizio precedente e sia K il punto di incontro dell'asse x con la retta d; verificare che vale la relazione $\frac{\overline{V_1F_1}}{\overline{KV_1}}=\frac{\overline{OF_1}}{\overline{OV_1}}$.

7 Dimostrare che l'ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ è tutta compresa fra le rette $x=-a$, $x=a$, $y=-b$, $y=b$.

8 Provare a scrivere l'equazione delle rette tangenti all'ellisse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ nei suoi punti

ESERCIZI

Paragrafo 6.1

1 Scrivere l'equazione dell'ellisse che ha i fuochi nei punti $(\sqrt{3}, 0)$ e $(-\sqrt{3}, 0)$ e i vertici in $(2, 0)$ e $(-2, 0)$. Cosa cambia se si scambiano le ascisse di tali punti con le ordinate? Disegna entrambe le curve.

2 Di un'ellisse si sa che l'eccentricità è $\frac{3}{4}$ e che il semiasse minore ha lunghezza 1; trovare l'equazione dell'ellisse.

3 È data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

a disegnarla

b sia P un punto di tale ellisse ed F_1 ed F_2 i suoi fuochi; prolungate il segmento F_2P di un segmento di lunghezza F_1P e chiamate F' questo punto. Dimostrare che la bisettrice dell'angolo F_1PF' ha un solo punto in comune con l'ellisse.

4 Sia d la retta di equazione $x = \frac{25}{4}$; scrivere il luogo geometrico descritto dal punto $P \leftrightarrow (x, y)$ tale che il rapporto fra la distanza di P dal punto $F \leftrightarrow (4, 0)$ e dalla retta d sia $\frac{4}{5}$; che figura ottieni?

5 Verifica che in generale se d è la retta di equazione $x = \frac{a^2}{c}$ e se sono verificate le seguenti ipotesi

a $a > 0$ $c > 0$ e $a > c$

b $a^2 = b^2 + c^2$

c F_1 ha coordinate $(c, 0)$

d H è la proiezione di P sulla retta d

allora il luogo dei punti P tali che $\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PH}} = \frac{c}{a}$ è l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. La retta d è la direttrice relativa al fuoco F_1.

6 Siano V_1 e V_2 i vertici dell'ellisse dell'esercizio precedente e sia K il punto di incontro dell'asse x con la retta d; verificare che vale la relazione $\frac{\overline{V_1F_1}}{\overline{KV_1}} = \frac{\overline{OF_1}}{\overline{OV_1}}$.

7 Dimostrare che l'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ è tutta compresa fra le rette $x = -a$, $x = a$, $y = -b$, $y = b$.

8 Provare a scrivere l'equazione delle rette tangenti all'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ nei suoi punti

di ascissa 4. In quale punto si incontrano tali tangenti? Riconosci a quale retta appartiene il punto di intersezione?

(9) Disponendo di un software di geometria dinamica tracciare una retta r che passa per F_1 e le rette tangenti nei due punti di intersezione di r con l'ellisse; definire il punto di intersezione fra le due rette tangenti e descrivere il luogo geometrico di questo punto al variare della retta per F_1.

Paragrafo 6.2

(10) È data l'iperbole che ha i fuochi in $(5,0)$ e $(-5,0)$ e tali che la differenza delle distanze $|\overline{PF}_1 - \overline{PF}_2| = 6$. Trovarne l'equazione.

A quali regioni di piano appartiene tale curva? Quanto vale l'eccentricità $\frac{c}{a}$?

(11) Considera la retta d di equazione $x = \frac{9}{5}$ e il punto $F \leftrightarrow (5,0)$; determinare il luogo descritto dal punto $P \leftrightarrow (x,y)$ tale che il rapporto fra la distanza di P da F e di P dalla retta d sia $\frac{5}{3}$.

Fare lo stesso procedimento considerando il fuoco $F_1 \leftrightarrow (-5,0)$ e la retta d_1 di equazione $x = -\frac{9}{5}$.

(12) Generalizza il problema come è stato fatto nel caso dell'ellisse (vedi es. 5); confronta l'equazione dell'iperbole di assi $2a$ e $2b$ con $b^2 = c^2 - a^2$ e l'equazione che ottieni facendo variare il punto P in modo che il rapporto fra la distanza di P dal punto $F \leftrightarrow (c,0)$ e dalla retta di equazione $x = \frac{a^2}{c}$ sia costante ed uguale a $\frac{c}{a}$. La retta d è la direttrice relativa al fuoco F.

(13) Verificare che se H è la proiezione di $P \leftrightarrow (x,y)$ sulla direttrice di equazione $x = \frac{a^2}{c}$ si ha $\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OV}}$.

(14) Trovare l'equazione degli asintoti dell'iperbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ e dimostrare che l'ordinata di tali asintoti è sempre maggiore dell'ordinata del corrispondente punto sulla curva.

Paragrafo 6.4

(15) Dimostrare che, data l'iperbole equilatera di equazione $xy = k$, la tangente in un suo punto $P \leftrightarrow (x_0, y_0)$ incontra gli assi rispettivamente nei punti $A \leftrightarrow (2x_0, 0)$ e $B \leftrightarrow (0, 2y_0)$.

(16) Tracciare per punti, rispetto ad uno stesso sistema di riferimento, i grafici delle relazioni: $xy = \frac{1}{2}$, $xy = 2$, $xy = 4$.

(17) Far vedere che anche per a negativo il grafico della relazione $xy = a$ è un'iperbole equilatera. E per $a = 0$ come è il grafico?

ESERCIZO SVOLTO

(27) Data l'equazione

$$y=\frac{2x-3}{x-1}$$

individuare la traslazione che la rende del tipo $y=\frac{k}{x}$.

Si nota subito che questa funzione ha per dominio $R-\{1\}$, ovvero non è definita in $x=1$; la retta $x=1$ pertanto si comporta come la retta $x=0$ per l'iperbole equilatera cioè come un asintoto.
Moltiplichiamo ora entrambi i membri per $x-1$; otteniamo $y(x-1)=2x-3$ e sviluppando $xy-y=2x-3$.
Risolviamo questa equazione rispetto ad x e otteniamo

$$x=\frac{y-3}{y-2}.$$

Questa è un'applicazione da y in x il cui dominio è $R-\{2\}$ ovvero non è definita per $y=2$; la retta $y=2$ si comporta quindi come la retta $y=0$ nel caso dell'iperbole equilatera, cioè l'altro asintoto.
Consideriamo allora la traslazione che manda il punto (1,2) nell'origine e applichiamola alla funzione di partenza:

$$x'=x-1 \qquad y'=y-2$$

da cui

$$x=x'+1 \qquad y=y'+2 \qquad y'+2=\frac{2(x'+1)-3}{(x'+1)-1}=\frac{2x'-1}{x'} \qquad y'=-\frac{1}{x'}$$

moltiplicando per x' entrambi i membri e semplificando si ottiene

$$x'y'=-1$$

che è l'equazione di un'iperbole equilatera riferita agli asintoti.

(28) Verificare per ciascuna delle seguenti funzioni che si tratta di iperboli equilatere di asintoti paralleli agli assi; individuare il centro di simmetria della funzione e la traslazione che la rende del tipo $y=\frac{k}{x}$; tracciarne il grafico.

a $y=\frac{3x-2}{2x+1}$ b $y=\frac{3}{x-1}$

c $y=\frac{-4x}{x+1}$ d $y=\frac{-2x+3}{10x+15}$

(29) Scrivere la traslazione che trasforma l'equazione $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ nell'iperbole equilatera $y=\frac{k}{x}$.

(30) Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti che passa per

a $A \leftrightarrow (5,-3)$ b $B \leftrightarrow (2,6)$ c $C \leftrightarrow (-3,1)$

31 Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti che ha per retta tangente la retta $2x + y = 1$.

32 Trovare le coordinate dei punti di intersezione dell'iperbole $y = \dfrac{10}{x}$ con la retta $x + y = 7$.

33 Trovare le coordinate dei punti di intersezione dell'iperbole $y = \dfrac{6}{x}$ con la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

34 Data la famiglia di parabole di equazione $y = \dfrac{-1}{k}x^2 + 2x + \dfrac{2-k^2}{k-1}$.

Determinare il luogo dei vertici; si tracci il grafico e si deduca da esso il grafico della $y = |f(x)|$.

CRITERI DI VERIFICA

1. Sai costruire un'ellisse/un'iperbole di cui si conoscono i fuochi e i vertici.
2. Sai riconoscere le simmetrie dell'ellisse e dell'iperbole.
3. Sai riconoscere dall'equazione se si tratta di un'ellisse, un cerchio, un'iperbole.
4. Sai trovare i fuochi e i vertici di un'ellisse/un'iperbole di equazione assegnata.
5. Sai calcolare l'eccentricità di un'ellisse/un'iperbole.
6. Sai tracciare la retta tangente in un punto della curva.
7. Sai riconoscere le proprietà geometriche delle rette tangenti.
8. Sai individuare gli asintoti dell'iperbole.
9. Sai riconoscere un'iperbole equilatera.
10. Sai tracciare il grafico dell'iperbole equilatera riferita ai suoi asintoti.
11. Sai scrivere l'equazione di un'ellisse o di un'iperbole trasformata per isometria.